

Travaux Dirigés De Logique

Yacine FARES

18 avril 2007

Table des matières

1	Mardi 06 Février 2007	2
1.1	Exercice 1	2
2	Mardi 13 Février 2007	4
2.1	Exercice 1	4
2.2	Exercice 2	4
3	Mardi 20 Février 2007	6
3.1	exercice 1	6
3.2	Exercice 2	7
4	Mardi 06 Mars 2007	8
4.1	Exercice 1	8
5	Mardi 13 Mars 2007	13
5.1	Exercice 1	13
5.2	Exercice 2	13
5.3	Exercice 3	15

Chapitre 1

Mardi 06 Février 2007

1.1 Exercice 1

Soit $L =$

- $T_v = \{x, y\}$
- $T_f = \{f\} : \text{arité}(f) = 1$
- $T_r = \{u, R\} :$
 - $\text{arité}(u) = 1$
 - $\text{arité}(R) = 2$

\mathcal{M} est une L-structure telle que

- $M = \mathfrak{R}$
- $u^{\mathcal{M}} = [0, 1] \subset \mathfrak{R}$
- $R^{\mathcal{M}} = \{f(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x < y\}$
- $f^{\mathcal{M}} : x \mapsto x^2 + 1$

1. Quelle est l'ensemble des termes de L ? Soit E l'ensemble des termes de L . $E = \{x, y, f(x), f(y), f(f(x)), f(f(y)), \dots\}$
2. bis : Soit $g : T_v \rightarrow \mathfrak{R} = M$. $s(x) = 1$, $s(y) = 2$. Quelles sont les valeurs des termes ?
 - $s(x) = 1$
 - $s(y) = 2$
 - $s(f(x)) = f^{\mathcal{M}}(s(x)) = (s(x))^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$
 - $s(f(y)) = f^{\mathcal{M}}(s(y)) = (s(y))^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$
 - $s(f(f(x))) = f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(s(x))) = ((s(x))^2 + 1)^2 + 1 = 5$
 - $s(f(f(y))) = f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(s(y))) = ((s(y))^2 + 1)^2 + 1 = 26$
3. Quels sont dans le plan \mathfrak{R}^2 les ensembles $\overline{R(x, y)}$, $\overline{u(x)}$, $\overline{u(f(x))}$
 - $\overline{R(x, y)} = \{s \in \mathfrak{R}^{T_v} \equiv \mathfrak{R}^{\{x, y\}} \equiv \mathfrak{R}^2 \mid \mathcal{M}, s \models R(x, y)\}$. $R(x, y)$ est une formule atomique $\mathcal{M}, s \models R(x, y)$ si et seulement si $R^{\mathcal{M}}(x, y)$ est vraie c'est-à-dire $(s(x), s(y)) \in R^{\mathcal{M}}$ c'est-à-dire $s(x) < s(y)$
 - $\overline{u(x)} = \{s \in \mathfrak{R}^{\{x, y\}} \mid \mathcal{M}, s \models u(x)\} = \{(s(x), s(y)) \mid s(x) \in u^{\mathcal{M}}\} = \{(s(x), s(y)) \in \mathfrak{R}^2 \mid 0 \leq s(x) \leq 1\}$

$$- \overline{u(f(x))} = \{s \mid \mathcal{M}, s \models u(f(x))\} = \{(s(x), s(y)) \in \mathfrak{R}^2 \mid f^{\mathcal{M}}(s(x)) \in u^{\mathcal{M}}\} = \{(s(x), s(y)) \mid (s(x))^2 + 1 \in [0, 1]\}. \quad s(x)^2 + 1 \in [0, 1] \Leftrightarrow s(x)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow s(x) = 0$$

4. $\overline{\exists x u(f(x))} : \overline{\exists x u(f(x))} = \{s \in \mathfrak{R}^{\{x,y\}} : \mathcal{M}, s \models \exists u(f(x))\}. \mathcal{M}, s \models \exists x u(f(x))$ si et seulement si $\exists s' \in \overline{u(f(x))} \forall v \in \{x, y\} v \neq x \rightarrow s(v) = s'(v). \forall (s(x), s(y)), \exists s' \in \overline{u(f(x))} : s'(y) = s'(y).$

Attention à vérifier... Peut comporter des erreurs

Il suffit de prendre $s'(x) = 0 \overline{\exists x u(f(x))} = \mathfrak{R}^2$ donc $\exists x u(f(x))$ est vraie pour \mathcal{M}

Fin du td du mardi 06 Février 2007

Chapitre 2

Mardi 13 Février 2007

2.1 Exercice 1

Énoncé : $((((P \wedge Q) \vee R) \wedge ((S \wedge T) \vee U)) \vee ((P \vee Q) \wedge R))$.

Mettre en FNC.

cf TD-13-02-07-1.JPEG.

F devient alors $((\underbrace{((P \wedge Q) \vee R)}_a) \wedge (\underbrace{((S \wedge T) \vee U)}_b)) \vee (\underbrace{(P \vee Q)}_c) \wedge \underbrace{R}_d$

$$\Rightarrow (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

$$\Rightarrow (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$

$$\Rightarrow (((P \wedge Q) \vee R) \vee ((P \vee Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee R) \wedge ((S \wedge T) \vee U)) \vee ((P \vee Q) \wedge ((S \wedge T) \vee U)) \vee R))$$

$$\Rightarrow (P \vee R \vee P \vee Q) \wedge (Q \vee R \vee P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (S \vee U \vee P \vee Q) \wedge (T \vee U \vee P \vee Q) \wedge (S \vee U \vee R) \wedge (T \vee U \vee R)$$

$$\Rightarrow (P \vee R \vee G) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (S \vee U \vee P \vee Q) \wedge (T \vee U \vee P \vee Q) \wedge (S \vee U \vee R) \wedge (T \vee U \vee R)$$

$$\equiv \{\{P, R, Q\}, \{P, R\}, \{Q, R\}, \{S, U, P, Q\}, \{T, U, P, Q\}, \{S, U, R\}, \{T, U, R\}\}$$

2.2 Exercice 2

Soit L :

- f : symbole de fonction d'arité 1

- g : symbole de fonction d'arité 2

- = : égalité

Sur ce langage, on considère les formules suivantes :

$$- F_1 = \exists x \exists y f(g(x, y)) = f(x)$$

$$- F_2 = \forall x \forall y f(g(x, y)) = f(x)$$

$$- F_3 = \exists y \forall x f(g(x, y)) = f(x)$$

$$- F_4 = \forall x \exists y f(g(x, y)) = f(x)$$

$$- F_5 = \exists x \forall y f(g(x, y)) = f(x)$$

$$- F_6 = \forall y \exists x f(g(x, y)) = f(x)$$

$\mathcal{M}_1 : M = N^*$

- $g : (m, n) \mapsto m + n$

- $f : m \mapsto 103$

$\mathcal{M}_2 : M = N$

- $g : (m, n) \mapsto m + n$

- $f : m \mapsto m(\text{mod}4)$

$\mathcal{M}_3 : M = N^*$

- $g : (m, n) \mapsto m + n$

- $f : m \mapsto 1$ si $m = 1$ sinon le plus petit diviseur $\neq 1$

$F_2 \rightarrow F_1$

$F_2 \rightarrow F_3$

$F_2 \rightarrow F_4$

$F_2 \rightarrow F_5$

$F_2 \rightarrow F_6$

Dans \mathcal{M}_1 on a F_2 vrai.

$\mathcal{M} \not\models F_2$.

exemple : $x = 1, y = 1$.

$g(x, y) = 2$.

$f(g(x, y)) = 2$.

$f(x) = 1$.

$\mathcal{M} \models F_3$: On prend $y = 4, x + 4 \equiv x[4]$.

$\mathcal{M} \models F_4$ car $F_3 \rightarrow F_4$.

$\mathcal{M} \not\models F_5$. Fin du td du mardi 13 Février 2007

Chapitre 3

Mardi 20 Février 2007

3.1 exercice 1

Mettre sous formes prénexes :

$$1. \forall x \forall y \forall z ((\exists t (T(t, x) \wedge R(t, y)) \wedge \exists (R(t, y) \wedge R(t, z))) \Rightarrow (\exists t \forall u (R(u, t) \rightarrow R(u, x) \wedge r(u, z))))$$

Autre exemple avant de traiter celui-ci :

$$\begin{aligned} F &= \forall x \forall y ((R(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \exists z (y = g(x, h(z, z)))) \\ \Leftrightarrow F' &= \forall x \forall y ((\underbrace{\neg(R(x, y) \vee \neg(x = y))}_P \vee \underbrace{\exists z (y = g(x, h(z, z)))}_Q)) \\ \Leftrightarrow F' &= \forall x \forall y \exists z ((\underbrace{\neg(R(x, y) \vee x = y)}_{zn'est pas une variable de P}) \vee (y = g(x, h(z, z)))) \end{aligned}$$

Revenons à notre exemple !!!!

$$\forall x \forall y \forall z [\neg(\exists t (R(t, x) \wedge R(t, y) \wedge \exists t (R(t, y) \wedge R(t, z))) \vee (\exists t \forall u [\neg(R(u, t)) \vee (R(u, x) \wedge R(u, z))])]$$

On effectue un changement de variable en remplaçant t par v

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z [(\forall t \neg R(t, x) \vee \neg R(t, y) \vee \forall v \neg R(v, y) \vee \neg R(v, z)) \vee \exists t \forall u [\neg R(u, t) \vee (R(u, x) \wedge R(u, z))]]$$

On effectue un changement de variable en remplaçant t par w

$$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall v (\neg R(t, x) \vee \neg R(t, y) \vee \neg R(v, y) \vee \neg R(v, z) \dots)$$

A finir.....

$$2. (\forall x F(x)) \Rightarrow G(y)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x F(x)) \vee G(y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x F(x)) \vee G(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \Rightarrow G(y))$$

$$3. (\exists x F(x)) \Rightarrow G(y)$$

$$\Leftrightarrow \neg[(\exists x F(x)) \vee G(y)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \neg F(x)) \vee G(y)$$

- $$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)) \vee G(y)$$
- $$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \Rightarrow G(y))$$
4. $F(x) \Rightarrow (\exists y G(y))$
- $$\Leftrightarrow \neg F(x) \vee (\exists y G(y))$$
- $$\Leftrightarrow \exists y(\neg F(x) \vee G(y))$$
- $$\Leftrightarrow \exists y(F(x) \Rightarrow G(y))$$
5. $F(x) \Rightarrow (\forall y G(y))$
- $$\Leftrightarrow \forall y(F(x) \Rightarrow G(y))$$
6. $(F(x) \Rightarrow (\forall x G(x)))$
- $$\Leftrightarrow (\neg F(x) \vee (\forall x G(x)))$$
- $$\Leftrightarrow (\neg F(x) \vee (\forall y G(y)))$$
- $$\Leftrightarrow (\forall y(F(x) \Rightarrow G(y))).$$

3.2 Exercice 2

Mettre sous forme prénexe, skolemiser, puis en ensemble de clause :
 $(\exists x(\neg F(x) \vee G(x))) \wedge (\exists F(x) \wedge \forall x \neg G(x))$

- Mise sous forme prénexe :
 - $\Leftrightarrow (\exists x(\neg F(x) \vee (G(x))) \wedge (\exists x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)))$
 - $\Leftrightarrow (\exists(\neg F(x) \vee G(x)) \wedge (\exists x \forall y (F(x) \wedge G(y))))$
 - $\Leftrightarrow (\exists(\neg F(x) \vee G(x)) \wedge (\exists v \forall y (F(v) \wedge G(y))))$
 - $\Leftrightarrow \exists x \exists v \forall y [(\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(v) \wedge \neg G(y)]$
- Skolemisation :
 - $\Leftrightarrow \forall z [(\neg F(a) \vee G(a)) \wedge F(b) \wedge \neg G(y)]$
- Ensemble de clauses :
 - $\Leftrightarrow \{\{\neg F(a), G(a)\}, \{F(b)\}, \{\neg G(y)\}\}$
- Suite de la skolemisation :
 - $\Leftrightarrow \forall x \exists y \forall z \exists u R(f(x, y), g(t, h(z, u)))$
 - On pose $y = l(x)$, $u = m(x, z, t)$
 - $\Leftrightarrow \forall x \forall z \forall t R(f(x, l(x)), g(t, h(z, m(x, z, t))))$

Fin du td du mardi 20 Février 2007

Chapitre 4

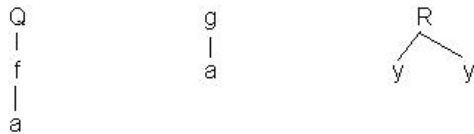
Mardi 06 Mars 2007

4.1 Exercice 1

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est unifiable, et si oui, donner un unificateur principal :

1. $W = \{Q(f(a)), g(a), R(y, y)\}$
2. $W = \{Q(a), Q(b)\}$
3. $W = \{Q(a, x), Q(a, a)\}$
4. $W = \{Q(f(a), g(a)), Q(y, y)\}$
5. $W = \{Q(a, x, f(x)), Q(a, y, y)\}$
6. $W = \{Q(x, y, z), Q(u, h(v, v), u)\}$

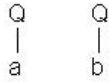
1 : Arbre de dérivation :



Ensemble de désaccord : $\{Q(f(a)), g(a), R(y, y)\}$.

Il n'est pas unifiable car pas de substitutions possibles.

2 : Arbre de dérivation :



Ensemble de désaccord : $\{a, b\}$.

Il n'est pas unifiable car on ne peut pas remplacer un terme par un autre.

3 : Arbre de dérivation :



Ensemble de désaccord : $\{x, a\}$

$k = 0$

$W_0 = W$

$\sigma_0 = \epsilon$

$v_0 = x, t_0 = a$.

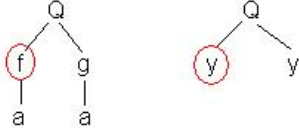
Cette paire convient car $v_0 = x$ n'apparaît pas dans $t_0 = a$.

$\sigma_1 = \{x|a\}\epsilon = \{x|a\}$

$w_1 = \sigma_1 w_0 = \{x|a\}w_0 = \{Q(a, a)\}$.

w_1 est un singleton donc l'ensemble est unifiable et donc l'unificateur principal est $\sigma_1 = \{x|a\}$.

4 : Arbre de dérivation :



Ensemble de désaccord : $D_0 = \{f(a), y\}$.

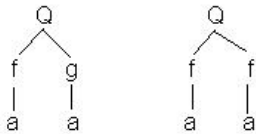
Le couple $(v_0, t_0) = (y, f(a))$ convient car la variable y ne figure pas dans $f(a)$.

$\sigma_1 = \{y|f(a)\}\epsilon = \{y|f(a)\}$.

$W_1 = \sigma_1 w = \{Q(f(a), g(a)), Q(f(a), f(a))\}$.

W_1 est-il un singleton ? Non, on continue...

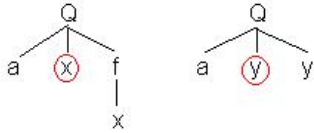
$k = 1$.



$D_1 = \{g(a), f(a)\}$.

Pas de paire qui convient donc l'ensemble W n'est pas unifiable.

$\underline{5}$: Arbre de dérivation :



$$k = 0$$

$$D_0 = \{x, y\}$$

$$\sigma_1 = \{x|y\}\epsilon = \{x|y\}$$

A noter que l'on peut également avoir :

$$D_0 = \{y, x\}$$

$$\sigma_1 = \{y|x\}\epsilon = \{y|x\}$$

Revenons à notre première version!!!!

$$w_1 = \sigma_1 w = \{Q(a, y, f(y)), Q(a, y, y)\}$$

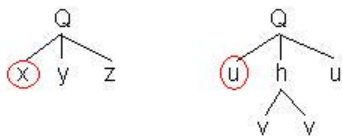
$$k = 1$$

cf TD-06-03-07-7

$$D_1 = \{y, f(y)\}$$

y apparaît dans $f(y)$ dans W n'est pas unifiaible.

$\underline{6}$: Arbre de dérivation :



$$k = 0$$

$$D_0 = \{x, u\} // \text{Sachez que l'on peut aussi avoir } D_0 = \{u, x\}$$

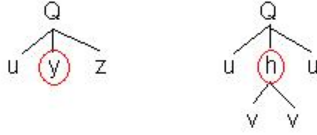
$$v_0 = x, t_0 = u$$

$$\sigma_1 = \{x|u\}\epsilon = \{x|u\}$$

$$w_1 = \sigma_1 w_0 = \{Q(u, y, z), Q(u, h(v, v), u)\}.$$

Ce n'est pas un singleton donc on continue...

$k = 1$



$$D_1 = \{y, h(v, v)\}$$

$$v_1 = y, t_1 = h(v, v)$$

$$\sigma_2 = \{y|h(v, v)\} \sigma_1 = \{y|h(v, v), x|u\}$$

$$w_2 = \sigma_2 w_0 = \{y|h(v, v)\} w_1 = \{Q(u, h(v, v), z), Q(u, h(v, v), u)\}$$

Ce n'est pas un singleton donc on continue...

$k = 2$

cf TD-06-03-07-10

$$v_2 = z, t_2 = u$$

$$\sigma_3 = \{z|u\} \sigma_2 = \{z|u, y|h(v, v), x|u\}$$

$$w_3 = \sigma_3 w_0 = \{z|u\} w_2 = \{Q(u, h(v, v), u)\}$$

C'est un singleton donc W est unifiable et un unificateur principal est $\sigma_3 =$

$$\{x|u, y|h(v, v), z|u\}$$

Fin du td du mardi 06 mars 2007

Chapitre 5

Mardi 13 Mars 2007

5.1 Exercice 1

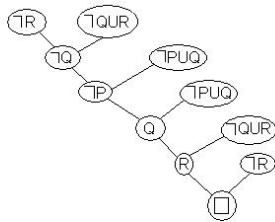
$$S = \{P \vee Q; \neg Q \vee R, \neg P \vee Q, \neg R\}$$

1. S est-il constitué de clauses de Horn ?
2. Peut-il être contradictoire ?
3. Dériver \square de S par résolution.

A : S n'est pas constitué de clauses de Horn car $P \vee Q$ est lui constitué de deux littéraux positifs.

2 : S peut être contradictoire car $\{\neg Q \vee R, \neg P \vee R\}$ est non contradictoire et $\{\neg Q \vee R, \neg P \vee Q, \neg R\}$ peut l'être.

3 : Arbre de résolution :



5.2 Exercice 2

Trouver une résolvante E pour la paire de clause $\{C, D\}$ avec

1. $C = \{\neg P(x), Q(x, b)\}$ et $D = \{P(a), Q(a, b)\}$
2. $C = \{\neg P(x), Q(x, x)\}$ et $D = \{\neg Q(a, f(a))\}$
3. $C = \{\neg P(v, z, v), P(w, z, w)\}$ et $D = \{P(w, h(x, x), w)\}$

1 : $C_1 = \{\neg P(x)\} \subset C$ et $D_1 = \{P(a)\} \subset D$

On veut unifier $C_1 \cup D_1 = \{\neg P(x), \neg P(a)\} = W$

$k = 0$

$\sigma = \epsilon$

$w_0 = w$

$D_0 = \{x, a\}$

$(v_0, t_0) = (x, a)$

$\sigma_1 = \{x|a\}\epsilon = \{x|a\}$

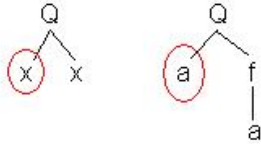
$w_1 = \sigma_1 w_0 = \{\neg P(a)\}$

$E = \sigma((C|C_1) \cup (D|D_1)) = \sigma\{Q(x, b), Q(a, b)\} = \{Q(a, b)\}$ 2 : (On cherche l'ensemble des résolvantes)

$C_1 = \{Q(x, x)\} \subset C$ et $D_1 = \{\neg Q(a, f(a))\} \subset D$

$C_1 \cup \neg D_1 = \{Q(x, x), Q(a, f(a))\} = W$

Arbre de dérivation :



$k = 0$

$\sigma = \epsilon$

$w_0 = w$

$D_0 = \{x, a\}$

$(v_0, t_0) = (x, a)$

$\sigma_1 = \{x|a\}\epsilon = \{x|a\}$

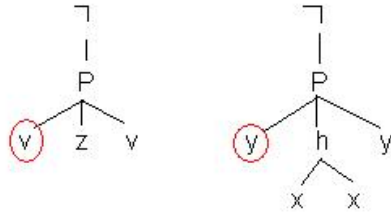
$w_1 = \sigma_1 w_0 = \{Q(a, a), Q(a, f(a))\}$

$k = 1$

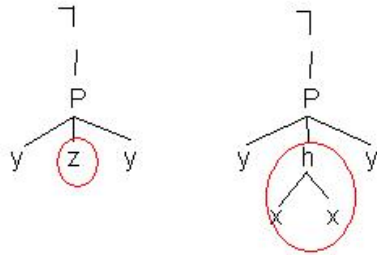
$D_1 = \{a, f(a)\}$ pas de paire.

w n'est pas unificateur principal \Rightarrow il n'y a pas de résolvante. 3 : $C_1 =$

$\{\neg P(v, z, v)\} \subset C$, $D' = \{w, y\}$ $D = \{P(y, h(x, x), y)\}$ et $D_1 = \{P(y, h(x, x), y)\} \subset D$
 $C_1 \cup \neg D_1 = \{\neg P(v, z, v), \neg P(y, h(x, x), y)\}$



$\sigma_1 = \{v|y\}$
 $w_1 = \{\neg p(y, z, y), \neg P(y, h(x, x), y)\}$



$\sigma_2 = \{z|h(x, x)\}$
 $w_2 = \{\neg P(y, h(x, x), y)\}$ est un singleton \Rightarrow unificateur principal : $\sigma_2 = \{v|y, z|h(x, x)\}$
 $E = \sigma_2((C|C_1) \cup (D'|D)) = \sigma_2\{P(w, z, w)\} = \{P(w, h(x, x), w)\}$

5.3 Exercice 3

$F_1 : \forall x(C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x)))$
 $F_2 : \exists x(C(x) \wedge Q(x))$
 $G : \exists x(Q(x) \wedge R(x))$

Montrer par programmation (résolution) que $(F_1 \wedge F_2) \rightarrow G$. Méthode :

- Mettre F_1 , F_2 et $\neg G$ sous forme clausales
- Ramener l'implication cherchée à la contradiction d'un ensemble de clauses
- Prouver cette contradiction par résolution (trouver un arbre de réfutation)

1 : Ok pour F_2 et G .

En effet : $F_2 = \{\{C(a)\}, \{Q(a)\}\}$ et

$$\neg G = \forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x)) = \{\{\neg Q(x), \neg R(x)\}\}.$$

$$F_1 = \forall x(C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x)))$$

$$= \forall x(\neg C(x) \vee W(x)) \wedge (\neg C(x) \vee R(x))$$

$$= \{\{\neg C(x), W(x)\}, \{\neg C(x), R(x)\}\}$$

$$\underline{2} : F_1 \wedge F_2 \rightarrow G \Leftrightarrow \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee G$$

$$\Leftrightarrow \neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G)$$

$F_1 \wedge F_2 \rightarrow G$ équivaut à la contradiction de

$$\{\{\neg C(x), W(x)\}, \{\neg C(x), R(x)\}, \{C(a)\}, \{Q(a)\}, \{\neg Q(x), \neg R(x)\}\}$$