Mise sous forme clausale d'une forme booléenne :

Soit F une formule propositionnelle à n variables $v_1,\ldots,v_n$. Sa table de vérité : 2^n valeurs.
ν_i (F) i=1.. 2^n Où les ν_i sont les 2^n valuations sur $v_1,\ldots,v_n$.

Soit I$\subset$ {1,.., 2^n } l'ensemble des i tel que ν_i (F) =0.

Soit G une formule que l'on veut équivalente à F.
(F$\Leftrightarrow$G) $\Leftrightarrow$ $\forall$ i ν_i(G) = ν_i (F) $\Leftrightarrow$ [$\forall$ ν ν (G) =1 $\Leftrightarrow$ $\forall$ i $\in$ I $\nu \neq \nu_i$]

$\Leftrightarrow$ $\forall \nu$ ν(G) =1 $\Leftrightarrow$[$\forall$ i $\in$ I , $\exists$ j ν (v_j)$\neq \nu_i$ (v_j)]

$\Leftrightarrow$ $\forall \nu$ ν(G) =1 $\Leftrightarrow$$\forall$ i, $\exists$j ν(v_j)=$\neg\,\nu_i$ (v_j)

Pour i donné, la condition $\exists$j ν(v_j)=$\neg\,\nu_i$ (v_j) peut s'écrire

$\bigvee_{j=1}^{n}$ ν(v_j)=$\neg\,\nu_i$ (v_j) c'est-à-dire $\bigvee w_j$ où

w_j = si ν_i (v_j) = 1 alors $\neg$ v_j

Sinon v_j .

Exemple : F = (a$\wedge$b) $\rightarrow$c

	a	b	c		a$\wedge$b	(a$\wedge$b) $\rightarrow$c
ν_1	0	0	0		0	1
ν_2	0	0	1		0	1
	0	1	0		0	1
	0	1	1		0	1
	1	0	0		0	1
	1	0	1		0	1
ν_7	1	1	0		1	0
ν_8	1	1	1		1	1

I = {7}

G = $w_1 \vee w_2 \vee w_3$
G = $\neg$a$\vee$ $\neg$b$\vee$c

Exemple : c $\rightarrow$ (a$\wedge$b)

	a	b	c		a$\wedge$b	c $\rightarrow$(a$\wedge$b)
v_1	0	0	0		0	1
v_2	0	0	1		0	0
v_3	0	1	0		0	1
v_4	0	1	1			0
v_5	1	0	0		0	1
v_6	1	0	1		0	0
v_7	1	1	0		1	1
v_8	1	1	1		1	1

I = {2, 4,6}

G = $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

Résolution :

Notation :

On note l le littéral valant $\neg$l si l = v et l = $\neg \bar{v}$

Si l = $\bar{v}$ et l = v

On note c = $\{l_1, \dots, l_n\}$ la clause c = $\bigvee_{j=1}^{n} l_i$.

On note $c_1, \dots, c_p$ la formule $\bigwedge_{j=1}^{p} c_j$.

On note $\square$ la clause vide (de valeur $\perp$)

<u>Règle de résolution</u> :

Définition : Résolvante de deux clauses : Soient c_1, c_2, c_3 des clauses. On dit que c_3 est une résolvante de c_1 et c_2 si □ un littéral u tel que :

1. u$\in c_1$
2. $\bar{u} \in c_2$
3. $c_3 = (c_1 \setminus\{u\})$ ¿ $(c_2 \setminus\{\bar{u}\})$

Exemple : $c_1 = \{\neg a, \neg b, c, d\}$

$c_2 = \{a\}$

u = $\neg$a

$(c_1 \setminus\{\neg a\}) \cup (c_2 \setminus\{a\}) = \{\neg b, c, d\}$

Exemple :

$c_1 = \{p, q\}$, $c_2 = \{\neg p, \neg q\}$

u = p : $c_3 = \{q, \neg q\}$

u = q : c_3 = {p, ¬p}
Exemple : c_1 = p, c_2 = ¬p, c_3 = $\square$

Exemple : c_1 = {p, q, r}, c_2 = {¬r, s}
u = r, c_3 = {p, q, s}

Définition (preuve par résolution) : Soit C un ensemble de clause. Une preuve de résolution à partir de C est une suite $c_1,...,c_n$ / quelque soit i, $c_i \in$ C où $\exists$ j,k <i / c_i soit résolvante de c_j et c_k. c_n est appelé conclusion ou but de la preuve.
Si c_n =$\square$, la preuve est appelée réfutation de C.

<u>Théorème 1 : Validité de la résolution</u> :
Tout élément d'une preuve à partir de C est une conséquence de C.
Démonstration : Soit c1,..., c_n une preuve à partir de C. On veut montrer par récurrence que toute valuation v qui satisfait C satisfait aussi c_n :

- Si $c_n \in$ C alors $v(c_n)$=1
- sinon $\exists$ i,j < c_n résolvante de c_i et c_j
  Par hypothèse de récurrence $v(c_i)$=1 et $v(c_j)$=1

Soit u le littéral qui a permis la résolution

- si v(u) = 0, comme $v(c_i)$ = 1, alors $v(c_i$\{u})=1 donc $v(c_n)$=1
- si v(u)=1, $v(\bar{u})$ = 0 comme $v(c_j)$=1 alors $v(c_j \setminus \{\bar{u}\})$=1 donc $v(c_n)$=1.

Conséquence : Si un ensemble de clause admet une réfutation, alors il est contradictoire.

Démonstration : $\square$ n'est jamais vraie, donc ne peut être conséquence d'aucun ensemble de clause satisfaisable.

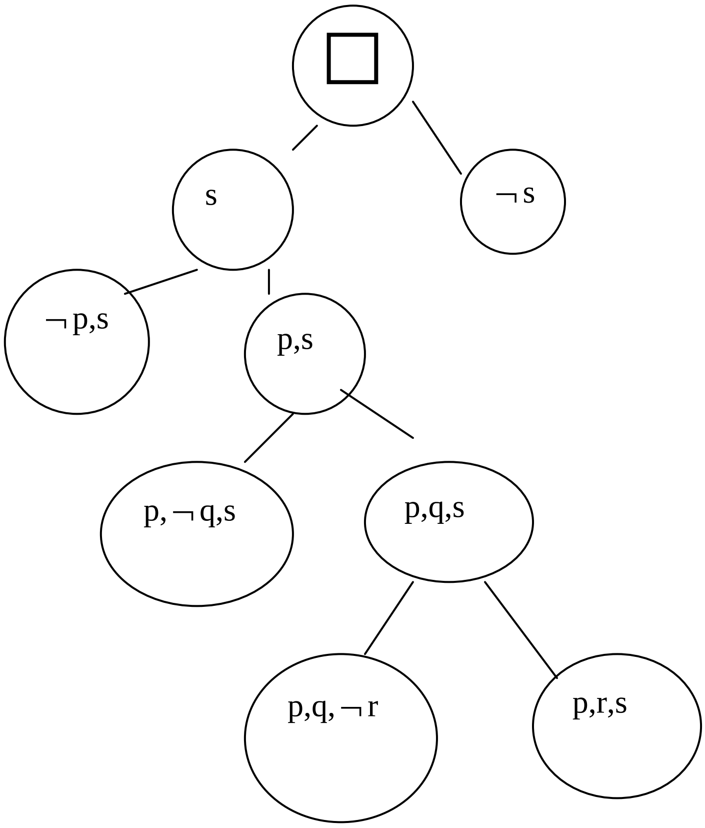
<u>Arbre de résolution</u> :
Définition : On appelle arbre de résolution (ADR) à partir d'un ensemble C de clause, un arbre binaire étiqueté tel que :

- les feuilles sont étiquetées par des éléments de C
- l'étiquette de tout noeud interne est une résolvante des étiquettes de ses fils.

<u>Construction d'un ADR à partir d'une preuve par dérivation (PPD)</u> :

- On prend la conclusion c_n de la PPD pour la racine de l'ADR.
- Si $c_n \in$ C on arrête, sinon $\exists$ i,j < n / c_n soit résolvante de c_i et c_j. On greffe sur c_n le sous arbre gauche complété de l'ADR de c_i et le sous arbre droit complété de l'ADR c_j.

Exemple :



Cet ADR montre que c = {{¬s},{¬p,s},{p, ¬q,s},{p,q, ¬r},{p,r,s}} est contradictoire.

<u>Théorème 2 : complétude de la résolution</u> :
Soit C un ensemble de clauses qui est contradictoire, alors il existe un ADR qui réfute C.

Lemme : soit C un ensemble de clause et u un littéral. On note C(u) l'ensemble des clauses : C(u) = {c\{$\bar{u}$} : c ∈ C et u ∉ C}

Exemple : C = {{a,$\bar{b}$,$\bar{c}$},{$\bar{a}$,b},{b,c,$\bar{d}$ },{c,d}}
C(a) = {{b},{b,c, $\bar{d}$ },{c,d}}
C($\bar{a}$) = {{$\bar{b}$,$\bar{c}$},{b,c, $\bar{d}$ },{c,d}}

Suite du lemme : Si C est contradictoire, alors C(u) est contradictoire.

Démonstration du lemme : On va montrer que si C(u) est satisfaisable, alors C est C est satisfaisable.
Soit • satisfaisants tous les éléments de C(u). La variable du littéral u n'apparaît pas dans les éléments de C(u). Donc on peut supposer que •(u)=1 sans changer la satisfaction de C(u).
Donc les éléments de C qui contiennent u sont satisfaits.
Les autres éléments de C (ne contenant pas u) sont

- ou dans C(u) : déjà satisfaits
- ou de la forme c $\cup$ {$\bar{u}$} avec c $\in$ C(u).

Dans ce cas :

- si c = $\square$ alors C(u) est contradictoire :(car tout ensemble contenant $\square$ est contradictoire) : impossible par hypothèse
- sinon comme •(c)=1, •(c $\cup${$\bar{u}$})=1

Démonstration du théorème 2 :
Si C est contradictoire, il existe un sous-ensemble fini de c noté c' qui est contradictoire (théorème de compacité).
On résonne par récurrence sur n = nombre de variables apparaissant dans c'.

- n=0 : c' réduit à la clause vide => l'ADR est réduit à la racine.
- n > 0 : soit u un littéral apparaissant dans un des éléments de c'. Chacun des C'(u) et C'($\bar{u}$) est lui aussi contradictoire (lemme) et ne comporte pas plus de n-1 variables.

Hypothèse de récurrence :

    Soit T_0 un ADR réfutant C'(u)
        T1 un ADR réfutant C'($\bar{u}$).

On modifie T_0 en $T_0^{'}$

- on ajoute $\bar{u}$ aux étiquettes de T_0 qui n'appartient pas à C' : donc les feuilles de $T_0^{'}$ contiennent des éléments de C.
- on ajoute $\bar{u}$ à l'étiquette d'un noeud interne si on a ajouté $\bar{u}$ à l'étiquette d'au moins un de ses fils : $T_0^{'}$ est ainsi un ADR (car les résolutions dans T_0 n'étaient jamais fonction sur u ni $\bar{u}$).

- $T_0^{'}$ est un ADR pour C'
- Sa racine est étiqueté par $\square$ ou $\bar{u}$:
  - si $\square$: $T_0^{'}$ est un arbre de réfutation pour C'
  - si $\bar{u}$: on modifie T1 en T'1 en remplaçant l'adjonction de $\bar{u}$ par l'adjonction de u. On obtient un ADR pour C dont la racine est $\square$ ou u :
    - si $\square$: T'1 est un arbre de réfutation pour C

- si u : on résout $\{\bar{u}\}$ et {u} en $\square$ et on construit un arbre de réfutation pour C.