

Calcul des sequents (GENTZEN)

Laura LALANNE

15 février 2007

Table des matières

0.1	Définition : LES SEQUENTS	2
0.1.1	Passage d'une déduction naturelle à une suite de séquent	2
0.1.2	Règles	2
0.2	Résolution pour le calcul propositionnel	4
0.2.1	Principe	4
0.2.2	Notation	6
0.2.3	Règles de résolution	6

0.1 Définition : LES SEQUENTS

On appelle *séquent* un couple (Γ, F) noté : $\Gamma \vdash F$ où :

- Γ est un ensemble fini de formules appelé contexte (ou antécédent) représentant les hypothèses.
- F est une formule appelée conclusion (ou conséquent) représentant la formule déduite des hypothèses

0.1.1 Passage d'une déduction naturelle à une suite de séquent

Exemple : $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$1. \frac{BA}{B}$$

En effet : $B, A \vdash B$ (où B, A joue le rôle de Γ et B celui de F)

$$2. \frac{BA-}{\frac{B}{A \rightarrow B}}$$

On a : $B \vdash (A \rightarrow B)$

$$3. \frac{B-A-}{\frac{B}{B \rightarrow (A \rightarrow B)}}$$

ceci se justifie par : $\rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow B)$

0.1.2 Règles

utilisation des axiomes

$$\overline{\Gamma, B \mid - A}$$

affaiblissement

$$\frac{\Gamma \mid - A}{\Gamma, B \mid - A}$$

introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \mid - B}{\Gamma \rightarrow A \rightarrow B}$$

élimination de l'implication

$$\frac{\Gamma \mid - A \rightarrow B \quad \Gamma \mid - A}{\Gamma \mid - B}$$

introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \mid - A \quad \Gamma \mid - B}{\Gamma \mid - A, B}$$

élimination de la conjonction

* élimination à gauche :

$$\frac{\Gamma \mid - A, B}{\Gamma \mid - A}$$

* élimination à droite :

$$\frac{\Gamma \mid - A, B}{\Gamma \mid - B}$$

introduction de la disjonction

* introduction à gauche :

$$\frac{\Gamma \mid - A}{\Gamma \mid - A \vee B}$$

* introduction à droite :

$$\frac{\Gamma \mid - B}{\Gamma \mid - A \vee B}$$

élimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \mid - A \vee B \quad \Gamma, A \mid - C \quad \Gamma, B \mid - C}{\Gamma \mid - C}$$

introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, A \mid - \perp}{\Gamma \mid - \neg A}$$

élimination de la négation

$$\frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \perp}$$

absurdité classique

$$\frac{\Gamma, \neg A \mid - A}{\Gamma \mid - A}$$

Exemple : $\neg A, \rightarrow (A \rightarrow \perp)$

$$\frac{\neg A, A \mid - \neg A \quad \neg A, A \mid - A}{\frac{\frac{\neg A, A \mid - \perp}{\neg A \mid - (A \rightarrow \perp)}}{\mid - \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)}}$$

0.2 Résolution pour le calcul propositionnel

0.2.1 Principe

- Seuls les connecteurs \neg, \wedge, \vee
- FNC
- Généralisation du modus Ponens (MP)

Exemple : MP

$$\frac{a \rightarrow b \quad a}{b}$$

$$\frac{\neg a \vee b \quad a}{b}$$

Exemple :

$$\frac{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d \quad a}{\neg b \vee c \vee d}$$

\approx

$$\frac{a \rightarrow (b \rightarrow (c \vee d)) \quad a}{b \rightarrow (c \vee d)}$$

Exemple :

$$\frac{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d \quad a \vee e \vee \neg f}{\neg b \vee c \vee d \vee e \vee \neg f}$$

$$\approx \frac{a \rightarrow (b \rightarrow (c \vee b)) \quad f \rightarrow (a \vee e)}{f \rightarrow ((b \rightarrow c \vee d) \vee e)}$$

Définition : littéral propositionnel

On appelle *littéral* une proposition de la forme $v \neg v$ où v est une variable. Un littéral est positif (resp. négatif) s'il est de la forme v (resp. $\neg v$)

Définition : clause

Une clause est une disjonction de littéraux.

Notation :

$\neg p \vee q \vee r$ est noté $[\neg p, q, r]$

Définition : clause de Horne

Une *clause de Horne* est une clause ne comportant pas plus d'un littéral positif. Une *clause de Horne définie* possède un littéral positif. Une *clause de Horne négative ou but* est une clause sans littéral positif.

$\neg p \vee \neg r, \neg p, p, \neg p \vee \neg r \vee q, []$

Nota bene : $[]$ est la clause vide

Définition : forme clausale, FNC

Une proposition est en *forme clausale* ou FNC si elle est une conjonction de clause. On note $F = \bigwedge_{i=1}^n C_i$, où les C_i sont des clauses telles que $\forall i, C_i = \bigvee_{j=1}^i L_j$ où les L_j sont des littéraux.

Exemple : $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg e \vee f)$

$\bigwedge_{i=1}^n F_i = F_1 \wedge F_2 \dots \wedge F_n$

$\bigvee_{i=1}^n F_i = F_1 \vee F_2 \dots \vee F_n$

$\bigwedge_{i=1}^0 F_i = T$

$\bigvee_{i=1}^0 F_i = \perp : []$

Proposition :

Toute formule propositionnelle est équivalente à une FNC.

Démonstration par de nombreux algorithmes

- écriture directe à partir de la table de vérité
- conversion brute d'équivalence syntaxique :
 - élimination du \Leftrightarrow ($F \Leftrightarrow G$ est remplacé par $F \Rightarrow G \wedge G \Rightarrow F$)
 - \neg est amené au contact des variables
 - algorithme de Boole avec la distributop, et FNC
- traduction dirigée par la syntaxe avec introduction de nouvelles variables.