

Déduction naturelle

Principe : Arbre étiqueté par des formules, feuilles étiqueté par des hypothèses.

Racine : formule à prouver.

\perp : Faux (ou absurde).

On notera $\neg A$ pour $A \mid\text{-} \perp$.

En effet,

A	\perp	$A \mid\text{-} \perp$	$\neg A$
0	0	1	1
1	0	0	0

Id (ou axiome):

$$\begin{array}{c} A \\ \text{---} \\ A \end{array}$$

Affaiblissement :

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ \text{-----} \\ A \end{array}$$

$$\Lambda_i \quad \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{-----} \\ A \wedge B \end{array}$$

$$\Lambda_e^g \quad \begin{array}{c} A \wedge B \\ \text{-----} \\ A \end{array}$$

$$\Lambda_e^d \quad \begin{array}{c} A \wedge B \\ \text{-----} \\ B \end{array}$$

$$\vee_i^g \quad \begin{array}{c} A \\ \text{-----} \\ A \vee B \end{array}$$

$$\vee_i^d \quad \begin{array}{c} B \\ \text{-----} \\ A \vee B \end{array}$$

$$\vee_e \quad \begin{array}{cc} A & B \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ C & C \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} \cancel{A} & \cancel{B} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ A \vee B & C \quad C \end{array}$$

$$\text{-----}$$

$$C$$

\rightarrow
 (Théorème de déduction)

A	\cancel{A}
.	.
.	.
.	.
B	B

	$A \rightarrow B$

$A \vdash B$ $\vdash A \rightarrow B$

\rightarrow
 (Modus Ponens : MP)

.	.
.	.
.	.
$A \rightarrow B$	A

	B

\neg_i

A	\rightarrow	\cancel{A}
.		.
.		.
\perp		\perp

		$\neg A$

\neg_e

$\neg A$	A	

	\perp	

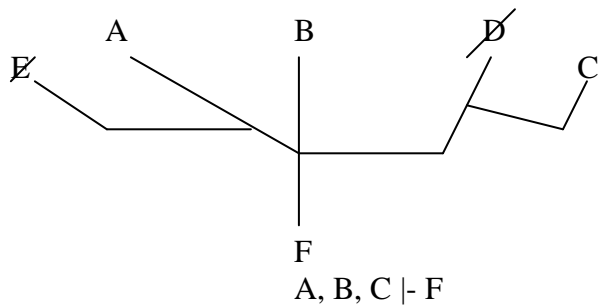
(Conséquence du MP
 $\neg A = A \vdash \perp$)

\perp_e

$\neg A$	\rightarrow	$\neg A$
.		.
.		.
\perp		\perp

		A

Pas intuitionniste.



Ex :
 $A \wedge B \vdash B \wedge A$

$$\begin{array}{c}
A \wedge B \quad \Lambda_e^d \\
\hline
B \\
\hline
A \wedge B \quad \Lambda_e^g \\
\hline
A \\
\hline
\hline
\Lambda_i \\
B \wedge A \\
\hline
(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)
\end{array}$$

Ex: $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c}
B \quad A \quad B \quad ? \\
\vdash \quad \vdash \quad \vdash \quad (A \rightarrow B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
B \quad B, A \quad ? \\
\vdash \quad \vdash \quad B
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
A \rightarrow B \quad B \vdash (A \rightarrow B)
\end{array}$$

$B \rightarrow (A \rightarrow B)$

Ex: $A > B, B > C \vdash A > C$

$$\begin{array}{c}
A > B \quad A \\
\hline
B \quad B > C \\
\hline
C \\
\hline
A > C
\end{array}$$