

AXIOMATIQUE DES CALCULS DES PREPOSITIONS

Problème : Trouver un schéma pour l'ensemble des tautologies au sein de l'ensemble S des formules propositionnelles :

1. *ensemble de base* : en des axiomes (sous ensemble de S)
2. ensemble fini de règles d'inférences : il existe des relations d'arités diverses permettant de dire si une formule F est une conséquence d'arité de n-1 autres formules F_1 à F_{n-1} .

La relation est notée \vdash

On a $F_1, \dots, F_{n-1} \vdash F_n$

Définition

On dit qu'on a défini une théorie formelle qui est axiomatique s'il existe une procédure effective pour décider si une formule de S est un axiome ou non.

On dit qu'une théorie formelle est décidable s'il existe une procédure effective pour décider si une formule est un théorème c'est-à-dire est dérivable à partir des axiomes.

Définition

Une preuve dans le système axiomatique S est une suite finie $A_1 \dots A_n$ de formules tel que pour tout i A_i est un axiome de S ou une conséquence directe des $A_1 \dots A_{i-1}$

Définition

Un théorème de S est une formule de S tel que il existe une preuve dont le dernier élément soit F.

Définition

Une formule de S est une conséquence de S d'un ensemble de formule Γ s'il existe une suite $A_1 \dots A_n$ de formules avec $A_n = F$ tel que $\forall i$:

A_i est un axiome ou

$A_i \in \Gamma$ ou

A_i est une conséquence directe de certains $A_1 \dots A_{i-1}$

Une telle suite s'appelle preuve de F à partir de Γ .

Les éléments de Γ sont appelés hypothèses . On note $\Gamma \vdash F$ ou $\Gamma \vdash$

B

Si F est un théorème c'est-à-dire $\Gamma = \langle \text{ensemble vide} \rangle$ on note $\vdash F$.

Proposition

1. Si $\Gamma \subset \Delta$ et si $\Gamma \vdash F$ alors $\Delta \vdash F$: *monotonie*

2. $\Gamma \vdash F$ si et seulement si il existe un sous ensemble fini Δ de Γ tel que $\Delta \vdash F$

3. Si $\Delta \vdash F$ et si $\forall G \in \Delta, \Gamma \vdash G$ alors $\Gamma \vdash F$

Un système particulier (L)

Formule E : ensemble des formules engendrés par une GNC

$T = \{ \sim, >, (,), \vee, ' \}$

| |
¬ ⇒

$P = \{ S \rightarrow V | (\sim S) | (S > S),$
 $V \rightarrow vM,$
 $M \rightarrow \varepsilon | 'M' \}$

Axiomes : ensemble infini défini par 3 schémas d'axiomes. Pour toutes formules A, B C, on a les axiomes :

1. A1 : $(A > (B > A))$
2. A2 : $((A > (B > C)) > (A > B) > (A > C))$
3. A3 : $((\sim B > A) > ((\sim B > A) > B))$

Règles d'inférence

Modus ponens

Pour toute formule A et B, B est une conséquence directe de A et $A > B$.

1. Le système est axiomatique.
2. On peut introduire les autres connecteurs par des identités syntaxiques :
 - $(A \wedge B)$ dénote $\sim (A > \sim B)$
 - $(A \vee B)$ dénote $(\sim A) > B$
 - $(A \equiv B)$ denote $((A > B) \wedge (B > A))$

Lemme : Pour toute formule $A \vdash A > A$

Démonstration

On va construire la preuve de $A > A$ dans L.

(1) $((A > \sim((A > A) > A)) > ((A > (A > A)) > A > A))$ avec A2 avec $A = A$, $B = (A > A)$, $C = A$.

(2) $(A > ((A > A) > A)$ avec $A = A$ et $B = (A > A)$

(3) $((A > (A > A)) > (A > A))$ avec modus ponens à l'aide de (1) et (2).

(4) $(A > (A > A))$ à l'aide de A1 avec $A = A$ et $B = A$.

(5) $(A > A)$, MP sur (3) et (4).

Théorème de la déduction

Si Γ est un ensemble de formules, A et B des formules et si $\Gamma, A \vdash B$

alors $\Gamma \vdash A > B$

En particulier, si $\sim A \vdash B$ alors $\vdash A > B$.

Démonstration

Soit $B_1 \dots B_n$ une preuve de B à partir de $\Gamma \cup \{A\}$, donc avec $B_1 = B$. On va construire une récurrence sur i tel que $\forall i \ 1 \leq i \leq n \ \Gamma \vdash A > B_i$:

Pour $i=1$: B_1 est :
a) dans Γ
b) un axiome
c) $B_1 = A$

- Si a) ou b), A1 donne $(B_1 > (A > B_1))$ puisque a) ou b) p, a $\Gamma \vdash B_1$, et par MP $\Gamma \vdash A > B_1$.
- Si c), le lemme donne $A > A$ est équivalent à $\vdash A > B_1$ donc $\Gamma \vdash A > B_1$ (monotonie).

Pour $i > 1$: On suppose $\Gamma \vdash A > B_k$ pour tout $k < i$. B_i est :

- un axiome
- dans Γ
- égal à 1
- une conséquence directe du MP de B_j et B_n avec $j, n < i$
 - a), b) et c) : $\Gamma \vdash A > B_j$ (comme pour $i = 1$)
 - Par récurrence $\Gamma \vdash A > (B_j > B_i)$; en appliquant A2 on a :
 $(A > (B_j > B_i)) > ((A > B_j) > (A > B_i))$
 Deux fois MP : $\Gamma \vdash A \vdash B$

Conséquences

Corollaires

- $A > B, B > C$ alors $\vdash A > C$
- $A > (B > C) \vdash A > C$

Démonstration de 1.

- $A > B$ (hypothèse)
- $B > C$ (hypothèse)
- A hypothèse démontrer à partir de $A > B, B > C$
- B a. et b. par MP
- C b. et d. par MP

Théorème de la déduction : $A > B, B > C \vdash A > C$

Lemme

Pour toutes formules A et B, les formules suivantes sont des théories

- $\sim \sim B > B$.
- $B > \sim \sim B$
- $\sim A > (A > B)$
- $(\sim B > \sim A) > (A > B)$
- $(A \sim B) > (\sim B > \sim A)$
- $A > (\sim B > (\sim A > B))$
- $(A > B) > ((\sim (A > B)) > B)$

Théorème de la validité

Tout théorème de L est une tautologie.

Théorème de complétude

Toute formule de L est une tautologie ayant un théorème de L

Démonstration du théorème de validité

1. On montre que chacun des axiomes est une tautologie.
2. Si MP est appliqué à deux tautologies, le résultat est une tautologie.

1.A1 ($A \supset (B \supset A)$) est une tautologie

A	B	$B \supset A$	$(A \supset (B \supset A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

A2.....

A3.....

2. Supposons F et $(F \supset G)$ sont des tautologies. On veut montrer que G est une tautologie.

Si G vaut 0 pour une valuation v ,

$v(F) = 1$ car F est une tautologie

$\bar{v}(F \supset G) = 0$: contredit l'hypothèse que $F \supset G$ est une tautologie. Donc G est une tautologie.