

## Substitutions

Définition :  $G, F \in \mathcal{F}$ . On note  $F [p := G]$  la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de  $p$  par  $G$ .

N.B : ici pas de problème de validité car pas de liaison par quantificateurs.

Ex :  $(v1 \Rightarrow (v2 \Rightarrow)) [v1 := (v2 \vee (\neg v1))] \equiv ((v2 \vee (\neg v1)) \Rightarrow (v2 \Rightarrow (v2 \vee (\neg v1))))$

Prop : Soit  $F, G$  deux formules. Pour toutes valuations  $n$ , on a  $v(\text{barre}) = (F [p := G]) = v'(\text{barre}) (F)$  où  $n'$  est la valuation défini par

$$\begin{aligned} v'(P) &= v(\text{barre})(G) \\ \forall v \neq p, v'(v) &= v(v) \end{aligned}$$

Conséquence : soient  $F, G, F', G' \in \mathcal{F}, p \in \mathcal{P}$ .

- Si  $F$  est une tautologie, alors  $F [p := G]$  est une tautologie.
- Si  $F$  et  $F'$  sont équivalentes, alors  $F [p := G]$  et  $F' [p := G]$  le sont également.
- Si  $G$  et  $G'$  sont équivalentes, alors  $F [p := G]$  et  $F [p := G']$  le sont également.

Application : Dédution d'identités à partir d'équivalences.

Ex :  $(F \Rightarrow G) \equiv ((F) \vee G)$   
 $(F \Leftrightarrow G) \equiv ((F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F))$

## Identités classiques

Commutativité :

$$\begin{aligned} (F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\ (F \vee G) &\equiv (G \vee F) \end{aligned}$$

Associativité :

$$\begin{aligned} (F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\ (F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) \end{aligned}$$

Idempotence:

$$\begin{aligned} (F \wedge F) &\equiv F \\ (F \vee F) &\equiv F \end{aligned}$$

Négation :

$$\begin{aligned} (\neg (F \wedge G)) &\equiv ((\neg F) \vee (\neg G)) \\ (\neg (F \vee G)) &\equiv ((\neg F) \wedge (\neg G)) \end{aligned}$$

Distributivité :

$$\begin{aligned} (F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\ (F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \end{aligned}$$

Absorption :

$$\begin{aligned} (F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\ (F \vee (F \wedge G)) &\equiv F \end{aligned}$$

Ces identités permettent ; une formule étant donnée, de trouver une équivalente ne comportant pas d'autre connecteur que  $\neg, \vee, \wedge$  et même en FNC (ou en FND).

Forme Normale Conjonctive : formule propositionnelle de la forme  $(F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn)$  où chaque  $Fi$  est une disjonction de la forme  $(G1 \vee \dots \vee Gpi)$  avec  $Gj$  de la forme  $P$  ou  $\neg P$ .

Ex :  $((\neg a \vee b) \wedge (c \vee d))$

Forme Normale Disjonctive : disjonction de conjonction de littéraux (littéral : variables ou négation de variables).

Tables de vérités : cf. TD.

Tableaux sémantiques :

➔ Méthode pour explorer la validité d'une formule propositionnelle.

Principe :

Règles : à chaque étape de la croissance de l'arbre, on détermine les possibilités de croissance à partir d'une feuille en inspectant les formules étiquettes des nœuds situées entre la racine et cette feuille.

Les formules de type  $\alpha$  permettent de prolonger un nœud d'étiquette  $\alpha 1$  ou  $\alpha 2$  au choix sans bifurcation.

Les formules de type  $\beta$  introduisent une bifurcation vers deux fils d'étiquette  $\beta 1$  et  $\beta 2$  ajoutés simultanément.

Types de formules :

$\alpha$	$\alpha 1$	$\alpha 2$
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg (X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg (X \Rightarrow Y)$	X	$\neg Y$
$\neg \neg X$	X	Y

B	$\beta 1$	$\beta 2$
$\neg (X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \vee Y$	X	Y
$X \Rightarrow Y$	$\neg X$	Y

Donc :  $\alpha$   $X \wedge Y$        $\neg (X \vee Y)$        $\neg (X \Rightarrow Y)$        $\neg \neg X$

$\parallel$                        $\parallel$                        $\parallel$                        $\parallel$   
 X                        X                        X                        X  
 $\parallel$                        $\parallel$                        $\parallel$                        $\parallel$   
 Y                         $\neg Y$                        $\neg Y$

Et  $\beta$   $\neg (X \wedge Y)$        $X \vee Y$        $X \Rightarrow Y$

$\begin{matrix} / & \backslash \\ \neg X & \neg Y \end{matrix}$        $\begin{matrix} / & \backslash \\ X & Y \end{matrix}$        $\begin{matrix} / & \backslash \\ X & Y \end{matrix}$

Règle de fermeture : Une branche est dite fermée dès qu'elle contient à la fois une formule et sa négation.

Règle de complétion : Une branche est dite complète, dès que pour toute formule  $\alpha$  qu'elle contient, elle contient aussi  $\alpha 1$  et  $\alpha 2$ , et pour toute formule  $\beta$  qu'elle contient elle contient aussi  $\beta 1$  ou  $\beta 2$ . Un arbre est complet si toutes ses branches sont fermées ou complètes.

Théorème :

1. Si une branche d'un tableau sémantique est complète et non fermée, les formules qu'elle contient sont simultanément satisfaisables
2. Si F est une tautologie, alors tout tableau complet développé à partir de la formule  $\neg F$  est sans branche fermée.
3. Si un tableau développé à partir de la formule  $\neg F$  est complet et sans branche fermée, alors F est une tautologie.

Ex : F  $((P \wedge Q) \vee Q) \Rightarrow (P \vee (\neg Q))$  est-elle une tautologie ?

Examinons  $\neg F$  :

$$\begin{array}{l}
 \neg ((P \wedge Q) \vee Q) \Rightarrow (P \vee (\neg Q)) \\
 \parallel \qquad \qquad \approx \neg (X \Rightarrow Y) \\
 (P \wedge Q) \vee Q \qquad \qquad X \\
 \parallel \\
 \neg (P \vee (\neg Q)) \qquad \qquad \neg Y \\
 \parallel \qquad \qquad \approx \neg (X \vee Y) \\
 P \qquad \qquad \neg X \\
 \parallel \\
 \neg \neg Q \qquad \qquad \neg Y \\
 \parallel \\
 Q \Rightarrow \text{branche fermée} \\
 / \quad \backslash \\
 P \wedge Q \quad Q \\
 \parallel \qquad \text{branche complète} \\
 P \\
 \text{Branche fermée}
 \end{array}$$

Le petit 3  $\Rightarrow$  F n'est pas une tautologie car il existe une branche fermée.

**Théorème (Compacité)**

**Définition :** Un ensemble  $\Sigma$  de formule est satisfaisable si il existe une valuation  $v$  tel que  $\forall F \in \Sigma v \text{ barre } (F) = 1$ .

**Enoncé :** Un ensemble  $\Sigma$  de formule est satisfaisable si et seulement si tout sous- ensemble de  $\Sigma$  est satisfaisable.

**Conséquence :**

1. Un ensemble  $\Sigma$  de formule est contradictoire si et seulement si il existe un sous-ensemble fini de  $\Sigma$  qui est contradictoire.
2. Une formule est conséquence sémantique d'un ensemble  $\Sigma$  de formule si et seulement si elle est conséquence d'un sous-ensemble fini de  $\Sigma$ .