

Logique des propositions (08/01/07 1ere partie)

Les propositions

Ce sont des expressions construites à partir des variables booléennes et d'opérateurs booléen (ou connecteurs) unaires et binaires.

Syntaxe : L'ensemble des proposition est défini comme le langage engendré par une GNC

$G=(N,T,S,P)$

$N=\{S,E,B\}$

$T=\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, (,), v_1, v_2 \dots\}$ (v_i est une infinité dénombrables de variables)

$P=\{$

$S \rightarrow (E) \mid v_1 \mid v_2 \dots,$

$E \rightarrow \neg S \mid SBS,$

$B \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow \}$

Définition

Une ensemble E est dénombrable si :

⊙ ou bien il est fini

⊙ ou il est infini en correspondance bijective avec N, c'est-à-dire si

Il existe $f : N \rightarrow E$, f bijective.

Proposition

L'ensemble $[0 ; 1]$ des réels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable.

Démonstration

On veut démontrer qu'il n'existe pas de bijection de $N \rightarrow [0 ; 1]$ tout entier. (raisonnement par l'absurde).

Supposons qu'il existe une suite a_1, a_2, \dots, a_n qui contienne tous les éléments de $[0 ; 1]$

Chaque éléments a_i s'écrit (de manière unique) comme suite décimale $0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}$

exemple : $a_7 = (2)^{1/2} - 1 = 0,414\dots$

donc $a_{73} = 4$.

On peut écrire un tableau :

| | | | | | |
|-------|---|----------|----------|----------|-------|
| a_1 | 0 | a_{11} | a_{12} | a_{13} | |
| a_2 | 0 | a_{21} | a_{22} | a_{23} | |
| a_3 | 0 | a_{31} | a_{32} | a_{33} | |

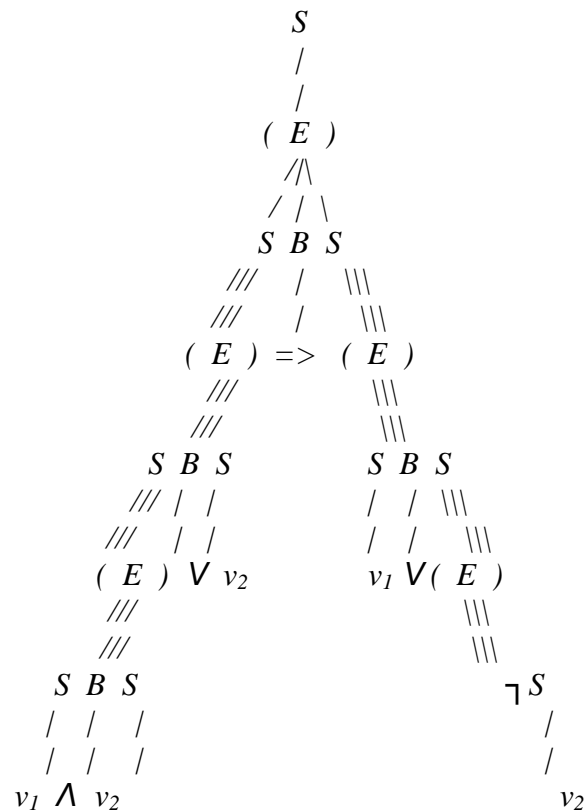
Ce tableau ne peut contenir tous les éléments de $[0 ; 1]$ On va construire un élément de $[0 ; 1]$ dont on est sûr qu'il n'est pas dans le tableau.

Soit $u = 0, u_1u_2u_3\dots$ tel que $u_1 \neq a_{11}, u_2 \neq a_{22}, u_3 \neq a_{33}$.

Donc, u n'est pas dans le tableau et u appartient à $[0 ; 1]$

Exemple

$$((v_1 \wedge v_2) \vee v_2) \Rightarrow (v_1 \vee (\neg v_2))$$



Autres définitions

2.

Soit $P = \{v_1, v_2, \dots\}$ ensemble de variables propositionnelles. L'ensemble F des propositions ou formules propositionnelles est engendré par le schéma inductif $(B, f_1, g_1, g_2, g_3, g_4)$ avec

- $B = P$
- $f_1 : F \rightarrow (\neg F)$
- $g_1 : F, G \rightarrow (F \wedge G)$
- $g_2 : F, G \rightarrow (F \vee G)$
- $g_3 : F, G \rightarrow (F \Rightarrow G)$
- $g_4 : F, G \rightarrow (F \Leftrightarrow G)$

3.

L'ensemble F des propositions sur P est défini par $F = \bigcup F_i$ avec $F_0 = P$ et pour tout $i \geq 0$, $F_{i+1} = F_i \cup \{(\neg F) : F \text{ appartient } F_i\}$

- $\cup \{ (F \wedge G) : F, G \text{ appartient } F_i \}$
- $\cup \{ (F \vee G) : F, G \text{ appartient } F_i \}$
- $\cup \{ (F \Rightarrow G) : F, G \text{ appartient } F_i \}$
- $\cup \{ (F \Leftrightarrow G) : F, G \text{ appartient } F_i \}$

Définition

Soit F appartient à F , sa profondeur est le plus petit entier n tel que F appartient à F_n

Exercice : Démontrer que tout formule propositionnelle a autant de « (» que de «) »

Sémantique

On appelle valuation sur P , tout fonction

$$v : P \rightarrow \{0 ; 1\} \text{ (ou } \{F, V\} \text{)}$$

Proposition

Pour toute valuation v sur P , il existe un prolongement unique \acute{u} , de v en une fonction définie sur F qui ont les propriétés suivantes

1. pour tout p appartenant à P , $\acute{u}(p) = v(p)$
2. Si $F = (\neg G)$ alors $\acute{u}(F) = 1$ ssi $\acute{u}(G) = 0$
3. Si $F = G \wedge H$ alors $\acute{u}(F) = 1$ ssi $\acute{u}(G) = 1$ et $\acute{u}(H) = 1$
4. Si $F = G \vee H$ alors $\acute{u}(F) = 0$ ssi $\acute{u}(G) = 0$ et $\acute{u}(H) = 0$
5. Si $F = (G \Rightarrow H)$ alors $\acute{u}(F) = 0$ ssi $\acute{u}(G) = 1$ et $\acute{u}(H) = 0$
6. Si $F = (G \Leftrightarrow H)$ alors $\acute{u}(F) = 1$ ssi $\acute{u}(G) = \acute{u}(H)$

Exemple

$$F : (((v_1 \wedge v_2) \vee v_2) \Rightarrow (v_1 \vee (\neg v_2)))$$

$$v(v_1) = 1$$

$$v(v_2) = 0$$

$$\acute{u}(F) = ??? \text{ (on doit trouver 1)}$$

Tautologie , équivalence sémantique

Définition

⊙ F est **satisfaite** par v si $\acute{u}(F) = 1$

⊙ On appelle **tautologie** une formule qui est satisfaite par toute valuation.

Exemple : $(v_1 \Rightarrow v_1)$ est une tautologie.

⊙ F et G sont équivalentes (sémantiquement) si pour tout v , $\acute{u}(F) = \acute{u}(G)$

Exemple $(v_1 \Rightarrow v_2)$ et $(\neg v_1 \vee v_2)$

Remarque : $(v_1 \Rightarrow (v_2 \Rightarrow v_1))$ est une tautologie.

Proposition

F et G sont équivalentes ssi $(F \Leftrightarrow G)$ est une tautologie.

Proposition

L'équivalence sémantique est une relation d'équivalence sur F .

Définition : Conséquence logique (sémantique)

Soit Σ un ensemble de formule et F appartenant à \mathcal{F} .

☉ F est **une conséquence de** Σ si toute valuation qui satisfait à la fois les éléments de Σ satisfait aussi F . On note $\Sigma \models F$

(Donc $\Sigma \models F$ ssi pour tout v (pour tout G appartenant à Σ , $v(G) = 1 \Rightarrow v(F)=1$)).

☉ Σ est **satisfaisable** (ou non contradictoire) s'il existe une valuation qui satisfait à la fois tous les éléments de Σ .

N.B. : les tautologies sont des conséquences de l'ensemble vide.